Ниже представлены исследовательские задачи. Не все задачи мои. После заголовка в скобках указаны математики, которым, по моей информации, было бы очень интересно узнать решение соответствующей задачи. Часто они же являются авторами, но не всегда. Свою фамилию я не пишу, т.к. иначе она бы встречалась после каждого заголовка. Я пытаюсь следовать принципу В.И. Арнольда, согласно которому формулируется не общий вопрос, а простейший частный случай этого вопроса, ответ на который еще не известен.

Рациональные отображения в квадрики. (М. Скопенков)

Задача 1. Описать все квадратичные рациональные отображения из проективного пространства $\mathbb{P}^3$ в трехмерную квадрику.

Трехмерная квадрика Q — это подмножество четырехмерного проективного пространства $\mathbb{P}^4$, заданное квадратным уравнением. Будем предполагать, что проективные пространства рассматриваются над комплексными числами, и что квадрика Q неособа. Тогда ее можно задать уравнением

$$x_0^2 = x_1^2 + \cdots + x_4^2.$$

в подходящим образом выбранной системе однородных координат $[x_0 : \cdots : x_4]$. Квадратичное рациональное отображение задается четверкой однородных квадратичных форм $\phi_0, \ldots, \phi_4$ от однородных координат $[u_0, u_1, u_2, u_3]$ в пространстве $\mathbb{P}^3$. Образ точки $[u_0, u_1, u_2, u_3]$ при этом отображении совпадает с точкой $[x_0 : \cdots : x_4]$, у которой $x_0 = \phi_0(u_0, u_1, u_2, u_3), \ldots, x_4 = \phi_4(u_0, u_1, u_2, u_3)$. Таким образом, задача эквивалентна нахождению всех пятерок квадратичных форм $\phi_0, \ldots, \phi_4$, для которых выполнено соотношение

$$\phi_0^2 = \phi_1^2 + \cdots + \phi_4^2. \qquad (1)$$

В качестве разминки можно решить аналогичную задачу для двумерной квадрики. Двумерную квадрику удобно задавать уравнением

$$x_0x_1 = x_2x_3.$$

Четверки комплексных чисел (x_0, x_1, x_2, x_3), удовлетворяющих этому уравнению, отождествляются с вырожденными матрицами 2×2. Ключевое соображение состоит в том, что любая вырожденная матрица 2×2 является тензорным произведением двух векторов.

Уравнение (1) — это уравнение на элементы степени 2 в кольце многочленов. Можно рассмотреть аналогичную задачу для других градуированных колец.

Кубические рациональные планаризации. Пусть U — открытое подмножество в $\mathbb{P}^2$, а $f : U \to \mathbb{P}^3$ — достаточно гладкое отображение, переводящее прямые в плоские кривые, т.е. такое, что для любой прямой $L \subset \mathbb{P}^2$ множество $f(U \cap L)$ лежит в некоторой плоскости. Такое отображение называется планаризацией.

Задача 2. Описать все кубические рациональные планаризации.

Очевидно, что любое квадратичное рациональное отображение является планаризацией: оно переводит прямые в коники. Имеются примеры кубических рациональных планаризаций. Я доказал, что все в некотором смысле нетривиальные примеры планаризаций сводятся к квадратичным или кубическим рациональным отображениям.

Таким образом, решение поставленной задачи поставит точку в описании всех планаризаций.

Окружности и расслоения Хопфа. Следующая задача, по всей видимости, не очень сложная.

Задача 3. Пусть $f : \mathbb{R}P^3 \to S^2$ — достаточно гладкое сюръективное отображение, переводящее все прямые в окружности. Доказать (или опровергнуть), что $f = M \circ H \circ P$, где $P : \mathbb{R}P^3 \to \mathbb{R}P^3$ — проективный автоморфизм, $H : \mathbb{R}P^3 \to S^2$ — расслоение Хопфа, а $M : S^2 \to S^2$ — преобразование Мебиуса.

Мне кажется, что этот результат можно достаточно легко вывести из теоремы А.Г. Хованского про отображения из открытого подмножества плоскости в открытое подмножество сферы, переводящие отрезки прямых в дуги окружностей. Впрочем, возможно, этот результат еще проще, чем теорема А.Г. Хованского. Интересны также аналоги этого утверждения для кватернионного ($\mathbb{R}P^7 \to S^4$) и октавного ($\mathbb{R}P^15 \to S^8$) расслоений Хопфа. В кватернионном случае, по всей видимости, можно было бы использовать мою теорему про отображения из открытого подмножества четырехмерного пространства в открытое подмножество четырехмерной сферы, переводящие отрезки прямых в дуги окружностей.

Соприкасающиеся алгебраические кривые. (Э. Жис)

Алгебраическая кривая степени d в $\mathbb{R}P^2$ зависит от $n(d) = \frac{(d+2)(d+1)}{2} - 1$ параметров. Более того, через любые $n(d)$ точек на плоскости проходит по крайней мере одна алгебраическая кривая степени d (и только одна в случае общего положения). Например, через любые $n(1) = 2$ точки проходит прямая, через любые $n(2) = 5$ точек проходит коника, через любые $n(3) = 9$ точек проходит кубическая кривая и т.д.

Рассмотим теперь гладкую кривую C на плоскости, не обязательно алгебраическую. Соприкасающаяся (с C) алгебраическая кривая в точке $x \in C$ определяется как алгебраическая кривая A_x степени d, для которой x является точкой $\geq n(d)$-кратного пересечения A_x с C. Говоря неформально, алгебраическая кривая A_x проходит через $n(d)$ бесконечно близких точек на кривой C. Например, соприкасающаяся с C в точке x окружность — это окружность, центр которой совпадает с центром кривизны кривой C в точке x, и радиус которой совпадает с радиусом кривизны. Точка $x \in C$ называется *d-экстатической*, если кратность пересечения кривых A_x и C в x превышает $n(d)$.

Задача 4. Предположим, что C — дуга гладкой кривой, не содержащая d-экстатических точек. Верно ли, что все соприкасающеся с C алгебраические кривые степени d различны?

При $d = 2$ это утверждение следует из того, что соприкасающиеся коники строго вложены друг в друга (аналогичное утверждение про соприкасающиеся окружности известно как теорема Тейта-Кнезера). Соприкасающиеся овалы кубических кривых тоже вложены, а вот для кривых четвертой степени это уже не верно.

Внешние бильярды в треугольнике на плоскости Лобачевского. (С. Табачников)

Внешний бильярд в треугольнике ABC устроен следующим образом. Начинаем с точки X, лежащей вне треугольника. Рассмотрим вершину треугольника, которая является самой правой, если смотреть из точки X. Допустим для определенности, что это вершина A. На прямой XA отметим точку $Y \neq X$, расстояние до которой от точки A совпадает с длиной отрезка AX. Точка Y — образ точки X при отображении бильярда. Внешний бильярд в треугольнике на аффинной плоскости не очень интересен, зато интересно рассматривать внешние бильярды на плоскости Лобачевского. Обозначим отображение бильярда через f. Это отображение определено во всех точках вне треугольника ABC, но не во всех точках является непрерывным. Пусть J — замыкание множества тех точек плоскости Лобачевского, в которых итерация $f^\circ n$ не является непрерывной для некоторого n.

Задача 5. Существуют ли блуждающие компоненты дополнения до множества J, то есть такие компоненты Ω, что $f^{\circ n}(\Omega) \cap \Omega = \emptyset$ для любого n?

Задача 6. Верно ли, что любая компонента Ω дополнения до множества J ограничена либо окружностью, либо выпуклым многоугольником?

Дипломная работа А. Пушкарь содержит промежуточные результаты в этом направлении, а также достаточно обширный экспериментальный материал.

Спаривания. (А. Эпстин, Тан Лей)

Рассмотрим отображение $p_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, заданное формулой $p_c(z) = z^2 + c$. Обозначим через K_c заполненное множество Жюлиа отображения p_c, то есть множество всех точек z, для которых $p_c(z) \not\to \infty$. Это множество обычно имеет фрактальную границу J_c, которая называется *множеством Жюлиа* отображения p_c. Если множество K_c связно, то его дополнение $\Omega_c = \mathbb{C}P^1 - K_c$ в сфере Римана является односвязной областью. Если, кроме того, множество J_c локально связно, то отображение Римана для Ω_c (то есть конформный изоморфизм между единичным диском и множеством Ω_c) продолжается по непрерывности на границу единичного диска, т.е. на единичную окружность, которую мы будем отождествлять с множеством $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Таким образом возникает отображение $\gamma_c : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to J_c$, которое обычно называют *петлей Каратеодори*. Петля Каратеодори обладает следующим замечательным свойством: $\gamma_c(2t) = p_c \circ \gamma_c(t)$.

Рассмотрим теперь два квадратных многочлена p_c и $p_{c'}$ со связными и локально связными множествами Жюлиа. Введем на несвязном объединении $K_c \sqcup K_{c'}$ минимальное отношение эквивалентности $\sim$, при котором $\gamma_c(t) \sim \gamma_{c'}(-t)$ для всех $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. На факторпространстве $X_{c,c'}$ пространства $K_c \sqcup K_{c'}$ по этому отношению эквивалентности определена естественная динамическая система, которая часто оказывается эквивалентой динамической системе на $\mathbb{C}P^1$, порожденной рациональной функцией степени 2. Для этого по крайней мере необходимо, чтобы топологическое пространство $X_{c,c'}$ было гомеоморфно сфере.

Задача 7. Пусть α_c — разделяющая неподвижная точка в K_c, то есть такая точка, что $p_c(\alpha_c) = \alpha_c$, и при этом $K_c - \{\alpha_c\}$ несвязно. Верно ли, что если α_c не эквивалентно $\alpha_{c'}$, то пространство $X_{c,c'}$ гомеоморфно сфере?

Мы здесь, конечно, предполагаем, что α_c и $\alpha_{c'}$ существуют. Тогда они единственны. Из теоремы Мэри Рис и Тан Лей вытекает частный случай сформулированного утверждения.

Параболические неподвижные точки. Рассмотрим многочлен $f(z) = \lambda z + z^2$, где λ — примитивный корень из единицы степени q. В этом случае
$$f^{\circ q}(z) = z + az^{q+1} + \dots,$$
где троеточие обозначает члены более высоких степеней. Коэффициенты при всех степенях от 2 до q равны нулю! Этот факт очень просто доказывается геометрически, но непросто алгебраически.

Задача 8. Найти явную формулу для коэффициента a (в зависимости от λ).

Аналогичная задача интересна для кубических многочленов вида $\lambda z + bz^2 + z^3$. В этом случае коэффициент a будет зависеть от параметра b. Эта зависимость, очевидно, полиномиальная.

Динамика некоторых рациональных отображений вещественной плоскости. (С. Дужин)

Рассмотрим следующее семейство рациональных отображений:
$$\Phi_{a,b}(x, y) = \left(y, \frac{y^a + y^b}{x}\right).$$
Здесь a и b — целые (возможно, отрицательные) числа. В этом семействе часто встречаются интегрируемые отображения, т.е. такие, для которых существует первый интеграл — рациональная функция $F(x, y)$, такая, что $F \circ \Phi_{a,b} = F$ (С.В. Дужин). Компьютерные эксперименты, проведенные С.В. Дужиным, показывают, что в этом семействе также встречаются хаотические отображения, которые выглядят как интегрируемые вплоть до микроскопических масштабов. Это очень загадочное явление, убедительного объяснения которому не найдено.

Задача 9. Исследовать, в зависимости от значений параметров a и b, следующие свойства отображения $\Phi_{a,b}$: интегрируемость, топологическая сопряженность повороту в окрестности неподвижной точки.

Топологическая сопряженность повороту в окрестности неподвижной точки (x_0, y_0) $(\Phi_{a,b}(x_0, y_0) = (x_0, y_0))$ означает наличие окрестности $U \ni (x_0, y_0)$ и гомеоморфизма $h : U \to h(U) \subset \mathbb{R}^2$, таких, что $h \circ \Phi_{a,b} \circ h^{-1}$ является поворотом (там, где это отображение определено).

Умножение кватернионных решеток. Рассмотрим решетку L в $\mathbb{C}$, т.е. дискретную подгруппу аддитивной группы комплексных чисел, изоморфную группе $\mathbb{Z}^2$. С точки зрения теории чисел интересно рассматривать решетки L с таким дополнительным свойством: $|z|^2$ является целым числом для каждого элемента $z \in L$. Будем называть такие решетки хорошими. Хорошие решетки соответствуют бинарным квадратичным формам, т.е. функциям от двух целых переменных x, y вида $ax^2 + bxy + cy^2$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Точнее, решетки нужно рассматривать с точностью до вращений вокруг 0, а квадратичные формы должны быть положительно определены, и рассматриваться с точностью до линейных подстановок вида $(x, y) \mapsto (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$, в которых $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Дискриминант $b^2 - 4ac$ квадратичной формы однозначно выражается через площадь фундаментального параллелограмма соответствующей решетки.

Заметим, что если мы случайным образом возьмем две решетки L_1 и L_2 в $\mathbb{C}$ и их перемножим, т.е. рассмотрим подгруппу L_1L_2 в $\mathbb{C}$, порожденную всеми произведениями вида z_1z_2, где $z_1 \in L_1$, $z_2 \in L_2$, то эта группа скорее всего будет всюду плотным подмножеством в $\mathbb{C}$. Гаусс обнаружил такой удивительный факт: если L_1 и L_2 — хорошие решетки одинакового дискриминанта, то L_1L_2 — тоже решетка. На этом наблюдении основано определение группы классов.

Очень мало что известно про многомерные обобщения конструкции Гаусса. Например, было бы интересно понять, в каком случае можно перемножать хорошие решетки в группе кватернионов. Например, стандартная решетка $\mathbb{Z}^4$ в группе кватернионов, состоящая из кватернионов, у которых все координаты целочисленны, замкнута относительно умножения. Какие еще бывают содержательные примеры, в которых произведение двух решеток дает решетку?

Многочлен объема комбинаторного куба. Рассмотрим многогранник P, полученный из d-мерного куба небольшим шевелением гиперграней. Таким образом, гиперграни многогранника P уже не перпендикулярны координатным осям. Однако попрежнему имеется взаимно-однозначное соответствие между гранями P и гранями стандартного куба, при котором пересечения граней переходят в пересечения граней. В этом случае говорят, что многогранник P комбинаторно эквивалентен кубу. Предположим, что начало координат находится строго внутри многогранника P, и обозначим через $h_1, \dots, h_{2d}$ длины высот, опущенных из начала координат на гиперграни многогранника P. Числа h_i называются *опорными числами.* Если мы начнем смещать каждую гипергрань многогранника P таким образом, что содержащая ее гиперплоскость подвергается параллельному переносу, то опорные числа будут меняться, но никакие углы в многограннике P меняться не будут. Мы получаем функцию $V(h_1, \dots, h_{2d})$, выражающую объем многогранника P как фукцию от опорных чисел. Эта функция, как нетрудно показать, является многочленом степени d, и поэтому называется *многочленом объема.*

Задача 10. Найти явное выражение для многочлена объема комбинаторного куба, т.е. для многочлена $V(h_1, \dots, h_{2d})$.

f-вектор многогранников Гельфанда–Цетлина. (В. Кириченко)

Многогранники Гельфанда–Цетлина играют важную роль в теории представлений и алгебраической геометрии. Пусть $\lambda_1 \le \dots \le \lambda_n$ неубывающая конечная последовательность целых чисел, т.е. целочисленное разбиение. По каждому такому разбиению определяется выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Обозначим через $u_{i,j}$ координаты в $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ — мы их будем нумеровать парами (i, j), в которых i пробегает целые значения от 1 до $n-1$, а j пробегает значения от 1 до $n-i$. Неравенства, задающие многогранник Гельфанда–Цетлина, определяются таблицей

$$\begin{array}{ccccccccc}
\lambda_1 & & \lambda_2 & & \lambda_3 & & \dots & & \lambda_n \\
& u_{1,1} & & u_{1,2} & & \dots & & u_{1,n-1} & \\
& & u_{2,1} & & \dots & & u_{2,n-2} & & \\
& & & \ddots & \dots & & & & \\
& & & u_{n-2,1} & & u_{n-2,2} & & & \\
& & & & u_{n-1,1} & & & &
\end{array} \qquad (GZ)$$

в которой каждая тройка чисел a, b, c, помещенных в вершинах треугольника

$$\begin{array}{ccc} a & & b \\ & c & \end{array}$$

связана неравенствами $a \leq c \leq b$.

Задача 11. Пусть P_λ — многогранник Гельфанда–Цетлина, соответствующий данному разбиению $\lambda = (\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n)$. Написать выражение для $f_k(P_\lambda)$ — числа k-мерных граней многогранника P_λ — или хотя бы соотношение на соответствующую производящую функцию.

В статье Гусева, Кириченко и Тиморина было получено разностное уравнение на производящую функцию для числа вершин многогранников Гельфанда–Цетлина, то есть для $f_0(P_\lambda)$. Эти числа были явно посчитаны в случае, когда $\lambda_i \in \{0, 1, 2\}$ для всех i.