**Правительство Российской Федерации**

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования   
"Национальный исследовательский университет   
"Высшая школа экономики"**

Московский институт электроники и математики Национального

исследовательского университета "Высшая школа экономики"

Факультет прикладной математики и кибернетики

**Программа дисциплины** **«Математическое моделирование»**

для направления 010400.62 «Прикладная математика и информатика»  
подготовки бакалавра

Автор программы:

Шнурков П.В., кандидат физико-математических наук, доцент, *pshnurkov@hse.ru*

Одобрена на заседании кафедры высшей математики МИЭМ НИУ ВШЭ

«\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2013 г

Зав. кафедрой Кузьмина Л.И. \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Рекомендована секцией УМС «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2013 г

Председатель \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Утверждена УС факультета «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2013 г.

Ученый секретарь \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Москва, 2013

*Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы.*

1. ***Цели и задачи дисциплины.***

Целью преподавания данной дисциплины является получение фундаментальных знаний по основам теории классического вариационного исчисления и оптимального управления.

Задача преподавания дисциплины состоит в создании у студентов устойчивого представления о современных математических методах оптимизации, используемых при анализе экономических и технических систем.

***2. Место дисциплины в структуре ООП.***

Дисциплина «Математическое моделирование» относится к вариативной части профессионального цикла (Б.3)

Для изучения данной дисциплины требуются знания, полученные в результате изучения следующих дисциплин:

1) Математический анализ (1,2 семестры)

2) Дополнительные главы математического анализа (1,2,3 семестры)

3) Дифференциальные уравнения (3 семестр)

4) Функциональный анализ (4 семестр)

5) Методы оптимизации (5 семестр)

Дисциплина «Математическое моделирование» является предшествующей по отношению к следующим дисциплинам:

1) Теория управления (7 семестр)

2) Исследование операций (6 семестр)

3) Численные методы (6,7 семестры)

***3. Требования к уровню освоения содержания дисциплины.***

*3.1 Общие требования к результатам освоения основной образовательной программы определяемые в соответствии и ФГОС ВПО по направлению «Прикладная математика и информатика (бакалавры)»*

**Результаты освоения ООП ПВО** определяются приобретенными выпускником компетенциями, т.е. его способностью применять знания, умения и личные качества в соответствии с задачами профессиональной деятельности.

**Общекультурные компетенции (ОК).**

* способность владеть культурой мышления, умение аргументировано и ясно строить устную и письменную речь (ОК-1);
* способность уважительно и бережно относиться к историческому наследию и культурным традициям, толерантность в воспитании социальных и культурных различий (ОК-2);
* способность осознать социальную значимость своей будущей профессии, обладать высокой мотивацией к выполнению профессиональной деятельности (ОК-9);
* способность у интеллектуальному, культурному, нравственному, физическому и профессиональному саморазвитию, стремление к повышению своей квалификации и мастерства (ОК-16);

**Профессиональные компетенции (ПК).**

1. *В области научно-исследовательской деятельности:*

* способность демонстрации общенаучных базовых знаний естественных наук, математики и информатики, понимание основных фактов, концепций, принципов теории, связанных с прикладной математикой и информатикой (ПК-1);
* способность приобретать новые научные и профессиональные знания, используя современные образовательные и информационные технологии (ПК-2);
* способность понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат (ПК-3);
* способность в составе научно-исследовательского и производственного коллектива решать задачи профессиональной деятельности (ПК-4);

1. *В проектной и производственно-технологической деятельности:*

* способность осуществлять целенаправленный поиск информации о новейших научных и технологических достижениях в Интернете и из других источников (ПК-6);
* способность решать задачи производственной и технологической деятельности на профессиональном уровне, включая: разработку алгоритмических и программных решений в области системного и прикладного программирования (ПК-9);

1. *В организационно-управленческой деятельности:*

* способность составлять и контролировать план выполняемой работы, планировать необходимые для выполнения работы ресурсы, оценивать результаты собственной работы (ПК-12);

*3.2 Специальные требования к уровню освоения содержания дисциплины (требования в знаниям, умениям и навыкам, приобретенным в результате изучения дисциплины)*

В результате изучения данной дисциплины студент должен:

**Знать:**

1) теоретические формулировки необходимых условий экстремума в различных задачах классического вариационного исчисления (КВИ) и оптимального управления (ОУ), приведенные в соответствующих разделах учебного курса;

2) теоретические методики составления и исследования систем соотношений, возникающих в различных задачах КВИ и ОУ, решениями которых являются допустимые экстремали;

3) особенности структуры различных видов задач КВИ и ОУ;

4) теоретические особенности различных понятий решений задач КВИ и ОУ;

**Уметь:**

1) проводить аналитические исследования различных видов задач КВИ и ОУ на основе известных теоретических методик;

2) использовать учебную и учебно-научную литературу для уточнения и осмысления теоретических результатов, приведенных в настоящем курсе;

3) использовать учебные пособия для дополнительного изучения методики решения экстремальных задач КВИ и ОУ;

**Владеть:**

1) навыками самостоятельного решения различных видов экстремальных задач КВИ и ОУ, приобретаемыми в ходе выполнения контрольных работ и домашних заданий.

***4. Объем дисциплины и виды учебной работы.***

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Вид учебной работы | Всего часов/  зачет. единиц | Семестры | |
| 5 | 6 |
| Общая трудоемкость дисциплины | 288/8 | 144/4 | 144/4 |
| Аудиторные занятия | 144/4 | 72/2 | 72/2 |
| Лекции (Л) | 72/2 | 36/1 | 36/1 |
| Практические занятия (ПЗ) | 72/2 | 36/1 | 36/1 |
| Семинары (С) |  |  |  |
| Лабораторные работы (ЛР) |  |  |  |
| И (или) другие виды аудиторных занятий |  |  |  |
| Самостоятельная работа | 108/3 | 36/1 | 72/2 |
| Курсовой проект (работа) |  |  |  |
| Расчетно-графические работы |  |  |  |
| Реферат |  |  |  |
| Контрольные работы и домашние задания |  |  |  |
| И (или) другие виды самостоятельной работы |  |  |  |
| Вид итогового контроля (зачет, экзамен) |  | экз. 36 | зачет с оценкой |

(В первой графе таблицы указываются виды аудиторных и самостоятельных занятий студентов. Во второй графе указывается общая трудоемкость дисциплины в соответствии с ГОС ВПО, объем аудиторных и самостоятельных занятий – в соответствии с примерным учебным планом. В третьей графе указываются номера семестров, в которых предусматривается каждый вид учебной работы и вид итогового контроля по дисциплине.

***5. Содержание дисциплины.***

***5.1. Разделы дисциплины и виды занятий.***

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N  п/п | Раздел дисциплины | Аудиторные занятия | | | | |
| Лекции | Практ. | Лаб. |  |  |
| 1 | Общая характеристика и постановки задач классического вариационного исчисления и оптимального управления. | 10 | 6 |  |  |  |
| 2 | Основы теории классического вариационного исчисления | 14 | 24 |  |  |  |
| 3 | Задачи классического вариационного исчисления с двумя параметрами (задача Лагранжа) | 8 | 6 |  |  |  |
| 4 | Математическая связь задач классического вариационного исчисления и оптимального управления | 4 | - |  |  |  |
| 5 | Математическое описание проблемы оптимального управления | 2 | - |  |  |  |
| 6 | Принцип оптимальности Беллмана. Введение в теорию (изучается на практических занятиях) | - | 10 |  |  |  |
| 7 | Принцип оптимальности Беллмана. Основная теория | 8 | - |  |  |  |
| 8 | Принцип максимума Понтрягина. Общая теория | 8 | 12 |  |  |  |
| 9 | Принцип максимума Понтрягина. Решение специальных задач | 18 | 14 |  |  |  |

***5.2. Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами***

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| №  п/п | Наименование обеспечиваемых (последующих) дисциплин | NN разделов данной дисциплины, необходимых для изучения обеспечиваемых (последующих) дисциплин | | | | | | | | |
| ***1*** | ***2*** | ***3*** | ***4*** | ***5*** | ***6*** | ***7*** | ***8*** | ***9*** |
| ***1*** | Теория управления | ***\**** | ***\**** | ***\**** | ***\**** | ***\**** | ***\**** | ***\**** | ***\**** | ***\**** |
| ***2*** | Исследование операций |  | ***\**** | ***\**** |  | ***\**** | ***\**** | ***\**** | ***\**** | ***\**** |
| ***3*** | Численные методы |  | ***\**** | ***\**** |  |  | ***\**** | ***\**** |  | ***\**** |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

***5.3. Содержание разделов дисциплины.***

***Раздел 1.*** Общая характеристика и постановки задач классического вариационного исчисления и оптимального управления.

Задачи классического вариационного исчисления (КВИ) и оптимального управления как особые виды экстремальных задач. Составные части экстремальных задач КВИ и ОУ: целевые функционалы, ограничения, граничные условия.

Общая классификация задач КВИ и ОУ: задача Лагранжа, Больца и Майера.

Общие черты и основные отличия экстремальных задач КВИ и ОУ.

Конкретные постановки задач КВИ.

Конкретные постановки задач ОУ.

Формальные определения слабого и сильного экстремума. Связь слабого и сильного локального экстремума.

Математическое определение понятия решения задачи ОУ. Последовательное введение понятий: управляемый процесс, допустимый управляемый процесс, оптимальный управляемый процесс.

***Раздел 2.*** Основы теории классического вариационного исчисления .

Классическая задача Больца без ограничений. Простейшая векторная задача КВИ (задача с закрепленными концами траектории). Постановка задачи. Теорема о необходимых условиях экстремума (формулировка). Анализ необходимых условий.

Задача КВИ с граничными условиями общего вида. Постановка задачи. Теорема о необходимых условиях экстремума.

Общая закономерность, связанная с разрешимостью экстремальных задач КВИ и ОУ.

Необходимое условие Вейерштрасса в простейшей задаче КВИ. Общее определение функции Вейерштрасса для произвольной непрерывно дифференцируемой функции. Геометрический смысл функции Вейерштрасса.

Теорема, в которой устанавливается, что условие Вейерштрасса является необходимым условием сильного минимума в простейшей задаче КВИ.

Необходимые условия второго порядка и достаточные условия в простейшей векторной задаче КВИ. Условие Лежандра в скалярном и векторном вариантах. Усиленные условия Лежандра. Уравнение Якоби в общей форме. Усиленное условие Якоби.

Основные результаты и их анализ. Теорема о необходимых условиях слабого минимума и достаточных условиях сильного минимума в простейшей векторной задаче. Теорема о достаточных условиях слабого минимума в простейшей векторной задаче. Замечания и комментарии к сформулированным теоремам.

***Раздел 3.*** Задачи классического вариационного исчисления с двумя параметрами (задача Лагранжа).

Общая (основная) постановка задачи Лагранжа с векторными параметрами (x(t), u(t)) в классическом варианте с дифференциальной связью и с граничными условиями. Вспомогательные объекты для исследования задачи Лагранжа как экстремальной задачи с ограничениями: лагранжиан и функция Лагранжа. Множители Лагранжа в рассматриваемой задаче, их математическая природа. Теорема о необходимых условиях экстремума.

Анализ необходимых условий экстремума в задаче Лагранжа.

Вычисление производных лагранжиана задачи по векторным параметрам  на основе теоретических результатов, полученных на семинарских занятиях. Новая форма необходимых условий, состоящая из трех основных частей: сопряженное уравнение как дифференциальное уравнение относительно сопряженной переменной; условия трансверсальности как граничные условия к сопряженному уравнению; условие стационарности по параметру u как некоторое функциональное уравнение относительно параметра u(t).

Обобщенная задача Лагранжа с дополнительными ограничениями. Постановка задачи Лагранжа с дополнительными ограничениями в виде равенств и неравенств, задаваемых интегрально-терминальными (смешанными) функционалами от параметров x(t), u(t).

Связь с результатами общей теории экстремальных задач.

***Раздел 4.*** Математическая связь задач классического вариационного исчисления и оптимального управления.

Сравнительная характеристика задачи КВИ с двумя параметрами (задачи Лагранжа) и общей задачи оптимального управления с непрерывным временем. Формулировка задачи Лагранжа с дифференциальной связью и граничными условиями и задачи оптимального управления с дифференциальной связью, граничными условиями и ограничениями на управление.

Аналитическое сравнение необходимых условий экстремума в задаче Лагранжа и в общей задаче оптимального управления.

Формулировка необходимых условий экстремума в задаче Лагранжа (теоретическая лагранжева форма) и необходимых условий экстремума в задаче оптимального управления (принцип максимума в форме Лагранжа).

***Раздел 5.*** Математическое описание проблемы оптимального управления.

Постановка задачи оптимального управления (ОУ) как экстремальной задачи с ограничениями

Основные особенности задачи ОУ, порожденные объективными причинами. Общая постановка задачи ОУ с непрерывным временем. Общая постановка задачи ОУ с дискретным временем.

***Раздел 6.*** Принцип оптимальности Беллмана. Введение в теорию (изучается на практических занятиях).

Принцип оптимальности Беллмана. Общая формулировка, принадлежащая автору. Различные варианты формулировок принципа оптимальности.

Метод динамического программирования как общий метод решения задач оптимизации. Основное содержание метода.

Задача оптимального распределения ресурсов (классическая экономическая проблема).

Решение задачи на основе метода динамического программирования.

Определение (формальное) функции Беллмана данной задачи и ее особенности.

Алгоритм решения задачи оптимального распределения ресурсов и его численная реализация.

Задача оптимального распределения с двумя видами ресурсов. Математическая постановка задачи. Уравнение Беллмана.

***Раздел 7.*** Принцип оптимальности Беллмана. Основная теория.

Принцип оптимальности Беллмана. Общая формулировка, принадлежащая автору. Различные варианты формулировок принципа оптимальности.

Метод динамического программирования как общий метод решения задач оптимизации. Основное содержание метода.

Задача оптимального управления с дискретным временем. Математическая постановка задачи. Решение задачи ОУ с дискретным временем методом динамического программирования.

Основная теорема для задачи ОУ с дискретным временем: выполнение уравнений Беллмана и достаточные условия оптимальности.

. Алгоритм решения задачи ОУ с дискретным временем и его численная реализация.

Система функциональных уравнений Беллмана как теоретическая основа алгоритма решения задач.

Задача оптимального управления с непрерывным временем. Метод динамического программирования.

Классическая задача ОУ с фиксированными концами интервалов времени [t0, t1], закрепленным левым и свободным правым концами траектории.

Рассмотрение семейства задач ОУ, зависящих от начального момента времени  и начального состояния (начала траектории) .Функция Беллмана.

Особенности уравнения Беллмана в задачах с непрерывным временем.

***Раздел 8.*** Принцип максимума Понтрягина. Общая теория.

Значение принципа максимума в теории оптимального управления. История создания и развития теории ОУ, основанной на принципе максимума.

Основная постановка задачи ОУ: задача с интегральным или смешанным интегрально-терминальным функционалом, дифференциальной связью, граничными условиями и ограничением на управление.

Принцип максимума в форме Гамильтона. Принцип максимума в форме Лагранжа.

Значение двух форм принципа максимума. Эквивалентность двух формулировок принципа максимума. Связь принципа максимума и общего принципа Лагранжа.

Общая система соотношений, используемых для решения рассматриваемой задачи ОУ, состоящая из необходимых условий, входящих в принцип максимума, и ограничений исходной задачи.

Алгоритмическое описание последовательности действий при исследовании общей системы соотношений с целью определения неизвестных параметров.

***Раздел 9.*** Принцип максимума Понтрягина. Решение специальных задач.

Классическая задача ОУ с фиксированными концами интервала времени, закрепленным левым и свободным правым концами траектории. Особенности необходимых условий экстремума, связанные со структурой задачи.

Формулировка основной теоремы о необходимых условиях экстремума в форме принципа максимума.

Составление и анализ общей системы соотношений для определения неизвестных параметров в рассматриваемой задаче ОУ, состоящей из необходимых условий и ограничений исходной задачи.

Задача ОУ с дополнительными ограничениями в виде равенств и неравенств, задаваемых смешанными интегрально-терминальными функционалами (обобщенная задача ОУ). Анализ полученной системы необходимых условий.

Принцип максимума, как достаточное условие оптимальности в некоторых специальных задачах ОУ.

Постановка классической задачи ОУ с фиксированными концами интервала времени, закрепленным левым и свободным правым концами траектории. Понятие функции Кротова. Теорема о достаточных условиях оптимальности в форме условий на функции Кротова

Принцип максимума и результаты теории КВИ.

Общая теоретическая идея о связи необходимых условий в задачах ОУ (условия, входящие в принцип максимума) и необходимых условий в задачах КВИ.

***5.4. План лекционных занятий.***

***Раздел 1. Общая характеристика и постановки задач классического вариационного исчисления и оптимального управления.***

***Лекция 1.*** Вводная лекция. Общая характеристика дисциплины «Математическое моделирование». Содержание данной дисциплины как важного направления в математической теории оптимизации и исследования операций. Краткий обзор разделов изучаемой дисциплины.

Общая структура курса, его объем и формы отчетности (в пятом и шестом семестрах).

Обзор основной и дополнительной литературы. Краткая характеристика используемых источников и форм работы с ними.

***Лекция 2.*** Задачи классического вариационного исчисления (КВИ) и оптимального управления как особые виды экстремальных задач, заданных на множествах функций *x(t)=(x1(t), x2(t), …, xn(t)), u(t)=(u1(t), u2(t), …, ur(t)),* где *x(t)=(x1(t), x2(t), …, xn(t))* – состояния системы, а *u(t)=(u1(t), u2(t), …, ur(t))* – управления системой (управляющие переменные),  - параметр времени.

Составные части экстремальных задач КВИ и ОУ: целевые функционалы, ограничения, граничные условия. Основные виды функционалов, ограничений и граничных условий. Общая классификация задач КВИ и ОУ: задача Лагранжа, Больца и Майера.

***Лекция 3.*** Общая постановка экстремальной проблемы, включающей в себя основные виды задач КВИ и ОУ. Общие черты и основные отличия экстремальных задач КВИ и ОУ.

Конкретные постановки задач КВИ. Задачи с одним (векторным) параметром: задача Больца без ограничений, простейшая векторная задача, общая задача с граничными условиями. Задача с двумя (векторными) параметрами: задача Лагранжа.

Конкретные постановки задач ОУ. Общая задача ОУ с подвижными концами интервала времени. Классическая задача ОУ с фиксированными концами интервала времени, закрепленным левым и свободным правым концами траектории.

***Лекция 4.***Задачи КВИ с одним параметром. Математическое определение понятия решения. Пространство функций  (краткая характеристика). Определения нормы в функциональных пространствах  и связанные с нормой каждого вида понятия окрестностей. Формальные определения слабого и сильного локального экстремума. Связь слабого и сильного локального экстремума.

Задача КВИ с двумя параметрами. Математическое определение понятия решения. Формальные определения слабого и сильного экстремума. Связь слабого и сильного локального экстремума.

***Лекция 5.*** Общая задача ОУ. Необходимый предварительный анализ. Основные особенности задач ОУ, порожденные объективной реальностью: аналитические свойства функций состояний (траекторий) x(t),  и управлений u(t), .

Математическое определение понятия решения задачи ОУ. Последовательное введение понятий: управляемый процесс, допустимый управляемый процесс, оптимальный управляемый процесс. Оптимальный управляемый процесс как сильный локальный экстремум. Сущность введенного понятия оптимальности.

***Раздел 2. Основы теории классического вариационного исчисления.***

***Лекция 6.*** Классическая задача Больца без ограничений. Постановка задачи. Теорема о необходимых условиях экстремума (формулировка). Схема доказательства, основанная на использовании теоретических результатов, полученных на семинарских занятиях в курсе «Математические методы и модели исследования операций» (6 семестр, задача 6, 10; контрольная работа, задача 2). Вывод необходимых условий экстремума: уравнения Эйлера, условий трансверсальности.

***Лекция 7.*** Классическая задача Больца без ограничений. Развернутая (покоординатная) форма необходимых условий. Алгоритмический смысл необходимых условий экстремума.

Простейшая векторная задача КВИ (задача с закрепленными концами траектории). Постановка задачи. Теорема о необходимых условиях экстремума (формулировка). Анализ необходимых условий.

***Лекция 8.*** Задача КВИ с граничными условиями общего вида. Постановка задачи. Теорема о необходимых условиях экстремума (формулировка). Доказательство теоремы о необходимых условиях экстремума. Особенности необходимых условий экстремума: уравнения Эйлера и условий трансверсальности.

***Лекция 9.*** Задача КВИ с граничными условиями общего вида (продолжение). Закономерности, связанные с условиями трансверсальности.

Анализ экстремальной задачи с ограничениями на примере задачи КВИ с граничными условиями общего вида. Составление системы соотношений, состоящей из необходимых условий и ограничений исходной задачи. Исследование полученной системы. Понятия экстремали и допустимой экстремали. Алгоритмический смысл необходимых условий. Общая закономерность, связанная с разрешимостью экстремальных задач КВИ и ОУ.

***Лекция 10.*** Необходимое условие Вейерштрасса в простейшей задаче КВИ. Общее определение функции Вейерштрасса для произвольной непрерывно дифференцируемой функции. Геометрический смысл функции Вейерштрасса. Многомерный вариант функции.

Функция Вейерштрасса в простейшей векторной задаче КВИ. Теорема, в которой устанавливается, что условие Вейерштрасса является необходимым условием сильного минимума в простейшей задаче КВИ. Идея доказательства теоремы: метод игольчатых вариаций Вейерштрасса.

***Лекция 11.*** Необходимые условия второго порядка и достаточные условия в простейшей векторной задаче КВИ. Предварительные результаты.

Вспомогательные функциональные матрицы частных производных второго порядка от интегранта функционала.

Условие Лежандра в скалярном и векторном вариантах. Усиленные условия Лежандра.

Уравнение Якоби в общей форме. Уравнение Якоби, разрешенное относительно старшей производной. Фундаментальное решение уравнения Якоби для скалярного и векторного вариантов.

Условие Якоби в скалярном и векторном вариантах (формулировки). Усиленное условие Якоби.

Условие квазирегулярности функционала в простейшей задаче.

***Лекция 12.*** Необходимые условия второго порядка и достаточные условия экстремума в простейшей векторной задаче КВИ. Основные результаты и их анализ.

Теорема о необходимых условиях слабого минимума и достаточных условиях сильного минимума в простейшей векторной задаче. Формулировка теоремы. Усиленный вариант теоремы для целевого функционала специального вида.

Теорема о достаточных условиях слабого минимума в простейшей векторной задаче (формулировка).

Замечания и комментарии к сформулированным теоремам. Соотношение необходимых и достаточных условий слабого и сильного минимумов. Различные условия гладкости в простейшей задаче. Проблема применения полученных теоретических результатов.

***Раздел 3. Задачи классического вариационного исчисления с двумя параметрами (задача Лагранжа).***

***Лекция 13.*** Общая (основная) постановка задачи Лагранжа с векторными параметрами (x(t), u(t)) в классическом варианте с дифференциальной связью и с граничными условиями. Вспомогательные объекты для исследования задачи Лагранжа как экстремальной задачи с ограничениями: лагранжиан и функция Лагранжа. Множители Лагранжа в рассматриваемой задаче, их математическая природа. Теорема о необходимых условиях экстремума (формулировка).

Схема доказательства теоремы о необходимых условиях экстремума, основанная на представлении исходной задачи Лагранж в форме задачи с ограничениями вида равенств в банаховом пространстве и применении соответствующей общей теоремы о необходимых условиях экстремума (правила множителей Лагранжа).

Предварительный анализ необходимых условий, их теоретический характер.

***Лекция 14.*** Анализ необходимых условий экстремума в задаче Лагранжа.

Предварительные замечания. Вычисление производных лагранжиана задачи по векторным параметрам  на основе теоретических результатов, полученных на семинарских занятиях в курсе «Математические методы и модели исследования операций» (6 семестр, задача 5; контрольная работа, задача 1). Представление необходимы условий экстремума в преобразованной форме, предназначенной для аналитического исследования. Новая форма необходимых условий, состоящая из трех основных частей: сопряженное уравнение как дифференциальное уравнение относительно сопряженной переменной; условия трансверсальности как граничные условия к сопряженному уравнению; условие стационарности по параметру u как некоторое функциональное уравнение относительно параметра u(t). Развернутая (координатная) форма необходимых условий как систем соотношений (уравнений).

***Лекция 15.*** Анализ необходимых условий экстремума в задаче Лагранжа (продолжение).

Составление общей системы соотношений (уравнений) относительно неизвестных параметров в задаче Лагранжа, включающей в себя необходимые условия и ограничения исходной задачи. Алгоритмический смысл необходимых условий: соответствие числа и характера неизвестных параметров числу и характеру соотношений, входящих в полученную общую систему. Алгоритмическое описание последовательности действий при решении общей системы уравнений.

***Лекция 16.*** Обобщенная задача Лагранжа с дополнительными ограничениями. Постановка задачи Лагранжа с дополнительными ограничениями в виде равенств и неравенств, задаваемых интегрально-терминальными (смешанными) функционалами от параметров x(t), u(t). Формулировка утверждения о системе необходимых условий в обобщенной задаче. Анализ полученной системы необходимых условий. Связь с результатами общей теории экстремальных задач. Алгоритмический смысл необходимых условий.

***Раздел 4. Математическая связь задач классического вариационного исчисления и оптимального управления.***

***Лекция 17.*** Сравнительная характеристика задачи КВИ с двумя параметрами (задачи Лагранжа) и общей задачи оптимального управления с непрерывным временем. Формулировка задачи Лагранжа с дифференциальной связью и граничными условиями и задачи оптимального управления с дифференциальной связью, граничными условиями и ограничениями на управление. Соответствие структуры и составных частей двух экстремальных задач. Сравнение аналитических условий на функции, определяющие этим экстремальные задачи. Соотношение необходимых условий экстремума в данных экстремальных задачах.

***Лекция 18.*** Аналитическое сравнение необходимых условий экстремума в задаче Лагранжа и в общей задаче оптимального управления.

Формулировка необходимых условий экстремума в задаче Лагранжа (теоретическая лагранжева форма) и необходимых условий экстремума в задаче оптимального управления (принцип максимума в форме Лагранжа). Возможности преобразования необходимых условий в обеих задачах. Соотношения между всеми составными частями необходимых условий экстремума в задаче Лагранжа и задаче оптимального управления.

***6 семестр***

***Раздел 5. Математическое описание проблемы оптимального управления.***

***Лекция 19.*** Постановка задачи оптимального управления (ОУ) как экстремальной задачи с ограничениями, определенной на множествах функций где описывает состояние системы (фазовые переменные), описывает управление системой (управляющие переменные), параметр времени.

Основные особенности задачи ОУ, порожденные объективными причинами. Аналитические свойства функций состояний (траекторий) и управлений

Общая постановка задачи ОУ с непрерывным временем. Составные части задачи (целевой функционал и ограничения).

Общая постановка задачи ОУ с дискретным временим. Составные части задачи (целевой функционал и ограничения).

***Раздел 6. Принцип оптимальности Беллмана. Введение в теорию (рассматривается на семинарских занятиях).***

***Раздел 7. Принцип оптимальности Беллмана. Основная теория.***

***Лекция 20.*** Принцип оптимальности Беллмана. Общая формулировка, принадлежащая автору. Различные варианты формулировок принципа оптимальности. Теоретическое значение принципа оптимальности.

Метод динамического программирования как общий метод решения задач оптимизации. Основное содержание метода. Пять основных этапов реализации метода динамического программирования и их общая характеристика.

***Лекция 21.*** Задача оптимального управления с дискретным временем. Математическая постановка задачи. Решение задачи ОУ с дискретным временем: выполнение уравнений Беллмана и достаточные условия оптимальности. Доказательство теоремы для двух вариантов задачи: при наличии терминального члена в целевом функционале и при отсутствии терминального члена.

Принципиальная идея, связанная с применением метода динамического программирования: если некоторый управляемый процесс удовлетворяет уравнениям Беллмана и ограничениям исходной задачи, то он является оптимальным.

***Лекция 22.*** Алгоритм решения задачи ОУ с дискретным временем и его численная реализация.

Система функциональных уравнений Беллмана как теоретическая основа алгоритма решения задачи.

Дискретизация задачи (переход к дискретным множествам состояний и управлений).

Первый этап реализации алгоритма (подготовительный). Создание вспомогательных массивов данных значений функции Беллмана и значений параметров управления, на которых достигается равенство в уравнениях Беллмана.

Второй этап реализации алгоритма (завершающий). Определение оптимальных значений параметров управления.

Оптимальность решения задачи ОУ с дискретным временем, полученного при реализации данного алгоритма.

***Лекция 23.*** Задача оптимального управления с непрерывным временем. Метод динамического программирования.

Классическая задача ОУ с фиксированными концами интервала времени закрепленным левым и свободным правым концами траектории.

Рассмотрение семейства задач ОУ, зависящих от начального момента времени и начального состояния (начала траектории) . Функция Беллмана. Вывод уравнения Беллмана, основанный на принципе оптимальности.

Особенности уравнения Беллмана в задачах с непрерывным временем. Уравнение Беллмана как уравнение с частными производными и наличием операции взятия экстремума.

***Раздел 8. Принцип максимума Понтрягина. Общая теория.***

***Лекция 24.*** Значение принципа максимума в теории оптимального управления. История создания и развития теории ОУ, основанной на принципе максимума.

Основная постановка задачи ОУ: задача с интегральным или смешанным интегрально-терминальным функционалом, дифференциальной связью, граничными условиями и ограничением на управление. Границы временного интервала могут быть переменными.

Две основные формы принципа максимума – гамильтонова и лагранжева.

Принцип максимума в форме Гамильтона. Вспомогательные функции: функция Понтрягина и гамильтониан. Формулировка теоремы 1 о необходимых условиях оптимальности.

Принцип максимума в форме Лагранжа. Вспомогательные функции: лагранжиан и функция Лагранжа. Формулировка теоремы 2 о необходимых условиях оптимальности.

***Лекция 25.*** Значение двух форм принципа максимума. Эквивалентность двух формулировок принципа максимума (доказательство утверждения об эквивалентности для трех основных соотношений, входящих в принцип максимума).

***Лекция 26.*** Связь принципа максимума и общего принципа Лагранжа.

Формулировка принципа Лагранжа. Усиленная форма принципа Лагранжа. Обоснование утверждения, состоящего в том, что при выполнении принципа Лагранжа в усиленной форме выполняются основные соотношения, входящие в принцип максимума.

Основной вывод: принцип максимума является реализацией общего принципа Лагранжа для рассматриваемого вида задач ОУ.

***Лекция 27.*** Развернутая (координатная) форма соотношений, входящих в принцип максимума. Общая система соотношений, используемых для решения рассматриваемой задачи ОУ, состоящая из необходимых условий, входящих в принцип максимума, и ограничений исходной задачи.

Алгоритмическое описание последовательности действий при исследовании общей системы соотношений с целью определения неизвестных параметров. Алгоритмический смысл необходимых условий в форме принципа максимума: соответствие числа и характера неизвестных параметров числу и характеру соотношений, входящих в сформированную общую систему.

***Раздел 9. Принцип максимума Понтрягина. Решение специальных задач.***

***Лекция 28.*** Классическая задача ОУ с фиксированными концами интервала времени, закрепленным левым и свободным правым концами траектории. Особенности необходимых условий экстремума, связанные со структурой задачи.

Формулировка основной теоремы о необходимых условиях экстремума в форме принципа максимума. Необходимые условия экстремума для рассматриваемой задачи: сопряженное уравнение, условие трансверсальности в правом конце интервала времени, условие максимума функции Понтрягина.

Особенности множителей Лагранжа в задаче: единственный множитель Лагранжа – сопряженный параметр

Составление и анализ общей системы соотношений для определения неизвестных параметров в рассматриваемой задаче ОУ, состоящей из необходимых условий и ограничений исходной задачи.

***Лекция 29.*** Теорема о необходимых условиях экстремума для классической задачи ОУ с фиксированными концами интервала времени, закрепленным левым и свободным правым концами траектории (классическая форма принципа максимума). Схема доказательства теоремы, основанная на использовании метода игольчатых вариаций Вейерштрасса.

***Лекция 30.*** Задача ОУ с дополнительными ограничениями в виде равенств и неравенств, задаваемых смешанными интегрально-терминальными функционалами (обобщенная задача ОУ). Вспомогательные функции в обобщенной задаче ОУ. Формулировка необходимых условий экстремума в форме принципа максимума в обобщенной задаче ОУ. Анализ полученной системы необходимых условий.

***Лекция 31.*** Принцип максимума как достаточное условие оптимальности в некоторых специальных задачах ОУ. Постановка классической задачи ОУ с фиксированными концами интервала времени, закрепленным левым концом и свободным правым концами траектории. Понятие функции Кротова. Теорема о достаточных условиях оптимальности в форме условий на функции Кротова (без доказательства).

Условия выпуклости и вогнутости функции нескольких вещественных переменных.

***Лекция 32.*** Принцип максимума как достаточное условие экстремума в некоторых специальных задачах ОУ.

Теорема об оптимальности управляемого процесса, удовлетворяющего условиям принципа максимума, для специального вида задач ОУ линейно-выпуклого характера (формулировка и доказательство теоремы).

***Лекция 33.*** Принцип максимума и результаты теории КВИ.

Общая теоретическая идея о связи необходимых условий в задачах ОУ (условия, входящие в принцип максимума) и необходимых условий в задачах КВИ. Аналитическое исследование на примере простейшей задачи КВИ.

Представление простейшей задачи КВИ в виде задачи оптимального управления. Вывод уравнения Эйлера и условия Вейерштрасса из необходимых условий в форме принципа максимума (сопряженное уравнение, условие максимума функции Понтрягина).

***Лекция 34.*** Принцип максимума и результаты теории КВИ (продолжение исследования).

Простейшая задача КВИ в форме задачи ОУ. Вывод канонических уравнений Гамильтона из необходимых условий в форме принципа максимума (сопряженное уравнение, условие максимума функции Понтрягина).

***Лекция 35.*** Связь принципа максимума Понтрягина и принципа оптимальности Беллмана.

Общие замечания о связи двух фундаментальных принципов современной теории ОУ. Некоторые аналитические выводы, иллюстрирующие указанную связь.

Важнейшие особенности каждого из двух фундаментальных принципов теории ОУ. Области применимости этих принципов в различных задачах ОУ. Теоретическое и прикладное значение принципа максимума Понтрягина и принципа оптимальности Беллмана в теории оптимального управления.

***Лекция 36.*** Заключительная лекция по курсу «Математическое моделирование».

Общий обзор идей и методов современной теории классического вариационного исчисления и оптимального управления. Значение современной математической теории оптимизации для решения прикладных задач.

***5.5. План семинарских занятий.***

***5 семестр***

**Раздел 1. Основы теории классического вариационного исчисления.**

***Занятие 1.*** Общая характеристика задач КВИ.  
Основные особенности экстремальных задач классического вариационного исчисления. Структура задачи КВИ. Функционалы, ограничения, граничные условия.  
Основные виды задач КВИ. Задачи с одним параметром :  
1. Задача Больца без ограничений (постановка задачи)  
2. Простейшая (векторная) задача (постановка задачи)  
3. Общая задача КВИ с граничными условиями (постановка задачи)  
Задачи с двумя параметрами :  
4. Задача Лагранжа (постановка задачи).

***Занятие 2.*** Понятие решения экстремальной задачи КВИ. Понятие функции, допустимой в исходной задаче КВИ. Понятие допустимой экстремали.

Определение слабого и сильного локального экстремума в задаче с одним параметром.  
Определение слабого и сильного локального экстремума в задаче с двумя параметрами.  
 Связь понятий слабого и сильного локального экстремума. Соотношение необходимых условий для слабого и сильного локального экстремума. Соотношение достаточных условий для слабого и сильного локального экстремума.

***Занятие 3.*** Методы исследования задач КВИ.  
Общая схема решения экстремальной задачи КВИ. Два основных этапа исследования:  
1) Составление общей системы соотношений, включающей необходимые условия и ограничения исходной задачи. Исследование полученной системы и нахождение допустимых экстремалей.  
2) Исследование найденных допустимых экстремалей и нахождение решения задачи.  
 Описание возможных методов исследования на втором этапе решения экстремальной задачи КВИ.

1) Метод непосредственной проверки определения локального или глобального экстремума

2) Проверка достаточных условий экстремума

3) Использование теорем существования и единственности решения задачи

Подробное описание основного аналитического метода исследования – метода непосредственной проверки. Теоретическое обоснование данного метода.

Особая проблема: доказательство того факта, что найденная функция (допустимая экстремаль) не доставляет локального экстремума и, таким образом, не является решением исходной задачи.

***Занятие 4.***

Классическое вариационное исчисление. Задача Больца без ограничений.  
Теорема о необходимых условиях экстремума в данной задаче. (формулировка)

Анализ системы необходимых условий экстремума в задаче Больца (уравнение Эйлера, условия трансверсальности).

Алгоритмический смысл необходимых условий экстремума в задаче Больца без ограничений.

*Задача 1.* Постановка задачи:



Необходимые условия экстремума в задаче - уравнение Эйлера и условия трансверсальности (подробный вывод).

***Занятие 5.*** Классическое вариационное исчисление. Задача Больца без ограничений (завершение анализа).

Исследование необходимых условий экстремума в задаче 1 и нахождение единственной допустимой экстремали.  
Единственная допустимая экстремаль . Доказательство того, что  представляет собой слабый глобальный (абсолютный ) минимум методом непосредственной проверки.

***Занятие 6.*** Классическое вариационное исчисление.

Простейшая задача.

Теоретические сведения.

Теорема о необходимых условиях экстремума в простейшей задаче (формулировка)

Общая система соотношений для определения допустимой экстремали: уравнение Эйлера и граничные условия исходной задачи.

*Задача 2.* Постановка задачи:

Исследуется система соотношений для определения допустимой экстремали.

Единственная допустимая экстремаль

Методом непосредственной проверки устанавливается, что для любой допустимой функции , где выполняется соотношение

Таким образом, функция доставляет глобальный минимум в исходной задаче (1) - (2).

***Занятие 7.***Классическое вариационное исчисление. Простейшая задача (продолжение исследования).  
*Задача 3.* Постановка задачи:  
  
Общая система соотношений для определения допустимой экстремали: уравнения Эйлера и граничные условия (2) исходной задачи.  
Единственная допустимая экстремаль .  
Методом непосредственной проверки устанавливается, что для любой допустимой функции , *h(0)=0, h(1)=0* выполняется соотношение

  
Таким образом, функция  доставляет глобальный максимум в задаче (1)-(2).  
Построение последовательности допустимых функций *xn(t)=nt(t-1), n*=1,2,..., для которой  
.  
Следовательно, функционал  не ограничен снизу на множестве допустимых функций, и решения задачи (1)-(2) на минимум не существует.

***Занятие 8.***

Классическое вариационное исчисление. Общая задача КВИ с граничными условиями. Теоретические сведения.  
Теорема о необходимых условиях экстремума в данной задаче (формулировка).

Система соотношений в общей задаче с граничными условиями состоящая из необходимых условий и ограничений исходной задачи.

Закономерности, связанные с условиями трансверсальности. Разрешимость общей системы соотношений и нахождение всех неизвестных параметров.

***Занятие 9.*** Классическое вариационное исчисление. Общая задача КВИ с граничными условиями.

*Задача 4.* Постановка задачи:

 (1)

 (2)  


Для решения используется методика исследования общей задачи с граничными условиями. Необходимые условия экстремума - уравнение Эйлера и условия трансверсальности. Подробный анализ условий трансверсальности: условие трансверсальности в точке  неинформативно.

Единственная допустимая экстремаль . Методом непосредственной проверки устанавливается, что для любой допустимой функции ,  выполняется условие

, то есть функция  доставляет абсолютный максимум в исходной задаче (1) – (2).

***Занятие 10.*** Классическое вариационное исчисление. Общая задача КВИ с граничными условиями.

*Задача 5.* Постановка задачи.

Выписываются необходимые условия экстремума: уравнение Эйлера и условия трансверсальности. К полученным соотношениям добавляется граничное условие (2). Условие трансверсальности в точке неинформативно.

Исследуется два варианта полученной системы: при и при

Единственная допустимая экстремаль

Методом непосредственной проверки устанавливается, что дл любой допустимой функции

Таким образом, функция доставляет глобальный минимум в исходной задаче (1) - (2).

***Занятие 11.*** Необходимые условия второго порядка и достаточные условия экстремума в простейшей задаче КВИ. Теоретические сведения.

Вычисление вспомогательных характеристик в простейшей задаче КВИ. Условие Лежандра (стандартное и усиленное). Уравнение Якоби. Фундаментальное решение уравнения Якоби и понятие сопряженной точки. Условие Якоби (стандартное и усиленное).

Условие квазирегулярности интегранта в простейшей задаче КВИ.

Теорема о необходимых условиях слабого минимума и достаточных условиях сильного минимума в простейшей задаче КВИ

 (1)

 (2)  


***Занятие 12.***

Необходимые условия второго порядка и достаточные условия экстремума в простейшей задаче КВИ.

*Задача 6.* Постановка задачи

 (1)

 (2)  


Решение уравнения Эйлера, нахождение единственной допустимой экстремали. Вычисление вспомогательных характеристик и вывод уравнения Якоби.

***Занятие 13.***

Необходимые условия второго порядка и достаточные условия экстремума в простейшей задаче КВИ.

Завершение анализа необходимых и достаточных условий в задаче (1)-(2). Доказательство того, что единственная допустимая экстремаль  доставляет сильный минимум. Проверка условий теоремы о достаточных условиях сильного минимума.

Доказательство того, что функция  доставляет абсолютный экстремум методом непосредственной проверки.

Выдача контрольной работы на тему «Задачи классического вариационного исчисления». Методические указания для студентов по выполнению контрольной работы.

**Раздел 2. Задача классического вариационного исчисления с двумя параметрами (задача Лагранжа).**

***Занятие 14.*** Задача Лагранжа. Теоретические сведения.

Общая постановка задачи Лагранжа. Аналитические свойства функций, определяющих задачу. Вспомогательные объекты: лагранжиан и функция Лагранжа.

Теорема о необходимых условиях экстремума в задаче Лагранжа. Представление необходимых условий в форме, удобной для аналитического исследования.

Составление общей системы соотношений для определения неизвестных параметров, состоящей из необходимых условий и ограничений исходной задачи. Методические рекомендации по исследованию полученной системы и нахождению допустимой экстремали.

***Занятие 15.***

Задача Лагранжа. Пример исследования.

*Задача 7.* Постановка задачи:

 (1)

 (2)

 (3)  


Приведение задачи (1)-(3) к каноническому виду задачи Лагранжа.

Преобразование задачи (1) – (3) при помощи замены: Задача (1) – (3) в канонической форме принимает вид

Вычисление вспомогательных характеристик и вывод необходимых условий экстремума: сопряженного уравнения, условий трансверсальности и условий стационарности лагранжиана по параметру u. Составление общей системы соотношений для определения неизвестных параметров, состоящей из необходимых условий и ограничений исходной задачи.

***Занятие 16.***

Задача Лагранжа.

Завершение анализа задачи Лагранжа, сформулированной на предыдущем занятии (задача 7). Исследование и определение единственной допустимой экстремали  ; .

Непосредственная проверка того, что пара функций  доставляет глобальный слабый минимум в исходной задаче.

***Занятие 17.***

Анализ результатов контрольной работы на тему «Классическое вариационное исчисление».

***Занятие 18.***

Заключительное занятие. Подведение итогов работы за семестр.

***6 семестр***

***Занятие 1.***

Введение в теорию оптимального управления. Общая характеристика задач оптимального управления (ОУ). Основные постановки задач: задачи ОУ с дискретным временем и задача ОУ с непрерывным временем. Два основных направления в теории ОУ: метод, основанный на принципе максимума Понтрягина, и метод динамического программирования, основанный на принципе оптимальности Беллмана.

Принцип оптимальности Беллмана. Общее описание метода динамического программирования.

***Занятие 2.***

Задача оптимального распределения ресурсов (классическая экономическая проблема). Математическая постановка задачи и её экономическое содержание. Решение задачи на основе метода динамического программирования.

Определение (формальное) функции Беллмана данной задачи и её особенности. Уравнение Беллмана как основное теоретическое соотношение. Два способа вывода уравнение Беллмана: качественный вывод на основе принципа Беллмана и аналитический вывод на основе свойств экстремумов функций.

***Занятие 3.***

Алгоритм решения задачи оптимального распределения ресурсов и его численная реализация.

Система функциональных уравнений Беллмана как теоретическая основа алгоритма решения задачи. Дискретизация задачи. Дискретный аналог уравнений Беллмана.

Первый этап реализации алгоритма (подготовительный). Создание вспомогательных массивов данных значений функции Беллмана и значений параметров управления, на которых достигается равенство в уравнениях Беллмана.

Второй этап реализации алгоритма (завершающий). Определение оптимальных значений параметров управления – объемов распределяемых ресурсов.

***Занятие 4.***

Доказательство оптимальности решения задачи оптимального распределения ресурсов, полученного методом динамического программирования.

***Занятие 5.***

Задача оптимального распределения с двумя видами ресурсов. Математическая постановка задачи. Уравнение Беллмана. Краткое описание алгоритма решения задачи на основе метода динамического программирования (по аналогии с алгоритмом решения задачи с одним ресурсом, изложенным в лекции 4).

Методические замечания по выполнению курсовой работы «Исследование задачи оптимального распределения ресурсов методом динамического программирования».

***Занятие 6.***

Задача Лагранжа.

Рассматривается экстремальная задача:

Приведение задачи (1)-(3) к каноническому виду задачи Лагранжа

Введение новых параметров:

Задача Лагранжа имеет вид:

Исследуются необходимые условия экстремума в задаче Лагранжа вида (4)-(6)

единственная допустимая экстремаль.

Методом непосредственной проверки доказывается, что пара функций ( доставляет глобальный минимум в исходной экстремальной задаче.

***Занятие 7.***

Задача Лагранжа.

Рассматривается экстремальная задача:

Приведение задачи (1)-(3) к каноническому виду задачи Лагранжа

Введение новых параметров:

Задача Лагранжа имеет вид:

Исследуются необходимые условия экстремума в задаче Лагранжа вида (4)-(6)

единственная допустимая экстремаль.

Методом непосредственной проверки доказывается, что пара функций ( доставляет глобальный минимум в исходной экстремальной задаче.

***Занятие 8.***

Принцип максимума Понтрягина (краткое изложение теории).

Постановка задачи оптимального управления (основная постановка).

Введение дополнительных функций: функции Понтрягина и гамильтониан. Теорема о необходимых условиях экстремума (принцип максимума в форме Гамильтона).

Классическая задача оптимального управления с фиксированными концами интервала времени [*t0,t1*], закрепленным левым и свободным правым концами траектории. Теорема о необходимых условиях экстремума (классическая форма принципа максимума).

***Занятие 9.***

Задача об оптимальном быстродействии (часть 1).

Описание физической модели системы (движущаяся управляемая материальная точка). Физические законы описания системы.

Математическая постановка задачи оптимального управления.



Необходимые условия экстремума: сопряженное уравнение, условие максимума функции Понтрягина. Общая структура оптимальных уравнений . Общий вид фазовых траекторий при управлении, удовлетворяющих условиям принципа максимума.

***Занятие 10.***

Задача об оптимальном быстродействии (часть 2).

Аналитическое исследование траекторий управляемого процесса. Определение неизвестных параметров оптимального процесса в зависимости от начальных условий.

Доказательство оптимальности управляемого процесса , удовлетворяющего условиям принципа максимума в задаче об оптимальном быстродействии. Метод доказательства: использование вспомогательной функции .

***Занятие 11.***

Задача об оптимальном быстродействии (часть 3).

Анализ задачи об оптимальном быстродействии методом динамического программирования.

Уравнение Беллмана в задаче об оптимальном быстродействии.

Определение явного представления для функции Беллмана в задаче об оптимальном быстродействии на основе полученных ранее результатов.

Непосредственная проверка того, что найденная функция Беллмана является решением уравнения Беллмана .

Исследование аналитических свойств функции Беллмана. Проверка того, что функция Беллмана не является непрерывно дифференцируемой при всех значениях аргумента *х=(х1,х2)*.

Заключительные замечания и выводы.

**Раздел «Принцип максимума Понтрягина. Решение специальных задач».**

***Занятие 12.***

Рассматривается экстремальная задача.



Приведение задачи (1)-(3) к каноническому виду задачи ОУ.

Введение новых параметров: .

Исследование полученной задачи на минимум.



Необходимые условия экстремума в форме принципа максимума. Анализ необходимых условий.

 (8) - единственная допустимая экстремаль.

Доказательство оптимальности процесса (8) методом непосредственной проверки.

***Занятие 13.***

Исследование задачи оптимального управления, сформулированной на занятии 5, на максимум.

Постановка экстремальной задачи.



Необходимые условия экстремума в форме принципа максимума. Анализ необходимых условий.

 (5) - единственная допустимая экстремаль.

Доказательство оптимальности процесса (5) проводится методом непосредственной проверки.

***Занятие 14.***

Рассматривается экстремальная задача.



Введем параметр управления  и приведем задачу (1)-(3) к каноническому виду задачи ОУ:

Задача оптимального управления имеет вид:



Используем необходимые условия экстремума в форме принципа максимума.

При исследовании получаем



(8) - единственная допустимая экстремаль.

Методом непосредственной проверки устанавливается, что пара функций , задаваемых соотношением (8) является решением задачи.

***Занятие 15.***

Исследовании задачи (4)-(8) предыдущего занятия на максимум.

Результат:  (9) - единственная допустимая экстремаль.

Методом непосредственной проверки получаем, что пара функций , задаваемых соотношением (9) является решением задачи.

***Занятие 16.***

Рассматривается экстремальная задача.



Введем параметр управления  и приведем задачу (1)-(3) к каноническому виду задачи ОУ:

Задача оптимального управления имеет вид:



Исследуем задачу (4)-(7) на минимум. Используем необходимые условия экстремума в форме принципа максимума.



- единственная допустимая экстремаль.

Методом непосредственной проверки получаем, что пара функций , задаваемая формулами (8), (9) является решением задачи (4)-(7) на минимум.

Подведение итогов за семестр. Завершение занятий.

***Занятие 17.***

Исследование задачи ОУ, сформулированной на занятии 16, на максимум.

Постановка экстремальной задачи:

Исследуем задачу (1)-(4) на минимум. Используем необходимые условия экстремума в форме принципа максимума

единственная допустимая экстремаль.

Методом непосредственной проверки доказывается, что пара функций ( доставляет глобальный минимум в исходной экстремальной задаче.

***Занятие 18.***

Подведение итогов работы в шестом семестре.

***6. Лабораторный практикум не предусмотрен.***

***7. Курсовая работа (краткое описание).***

Курсовая работа проводится в шестом семестре и связана с теорией оптимального управления.

Тема курсовой работы «Решение задачи оптимального распределения ресурсов методом динамического программирования».

Математическая постановка задачи одинакова для всех обучающихся. Каждый студент получает свой индивидуальный вариант, в котором задаются числовые параметры модели.

Математическая теория, лежащая в основе метода решения данной задачи (метод динамического программирования Беллмана), а также алгоритм численного исследования подробно изучаются на практических занятиях (см. занятия 1-5 шестого семестра).

В отчете о выполнении курсовой работы каждый студент должен привести теоретическую постановку задачи, описание её решения методом динамического программирования, алгоритм численного исследования и численные результаты работы программы, реализующей указанный алгоритм, то есть параметры оптимального распределения ресурсов.

***8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины.***

***8.1. Рекомендуемая литература:***

***а) основная литература:***

1) Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

2) Галеев Э.М. Оптимизация: теория, примеры, задачи. – М.: Эдиториал УРСС, 2002.

3) Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974.

4) Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – 7-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

***б) дополнительная литература:***

1) Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

2) Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.. Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высшая школа, 1998.

3) Беллман Р. Динамическое программирование. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960.

4) Беллман. Р., Гликберг И., Гросс О. Некоторые вопросы математической теории процессов управления. – М.: Издательство иностранной литературы, 1962.

5) Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. – М.: Наука, 1965.

6) Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1969.

7) Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. – М.: Издательство МГТУ им. Баумана, 1999.

8) Васильев Ф.П. Методы оптимизации. – М.: МЦНМО, 2011.

9) Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Айрис-пресс, 2002.

10) Основы теории оптимального управления. Под редакцией В.Ф. Кротова. – М.: Высшая школа, 1990.

11) Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В. Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976.

***8.2. Программное обеспечение.***

Пакеты прикладных программ, необходимых для выполнения курсовой работы на тему «Решение задачи оптимального распределения ресурсов методом динамического программирования».

Варианты: Exel, Statistica

***9. Материально-техническое обеспечение дисциплины.***

Специальное материально-техническое обеспечение не предусматривается.