

Асимптотика вблизи границ спектральных кластеров

Перескоков А.В. (pereskocov@comail.ru, Московский энергетический институт)

Рассматриваются задача на собственные значения в $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$\left(-\hbar^2((\partial/\partial q_1)^2 + (\partial/\partial q_2)^2) + q_1^2 + q_2^2 + \varepsilon V(q_1, q_2)\right)\psi = \lambda\psi, \quad \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1, \quad (1)$$

где V — произвольный многочлен 4 степени, \hbar, ε — малые параметры, причем $\varepsilon \ll \hbar$.

Лучевой метод [1] и общая теория комплексного ростка Маслова [2] позволяют строить асимптотические решения, локализованные вблизи маломерных инвариантных подмногообразий в фазовом пространстве. Однако указанные методы неприменимы в случае резонанса частот, который имеется в задаче (1). Метод построения квазиклассических асимптотик для уравнений с частотными резонансами был разработан в серии работ М.В. Карасева, начиная с [3]. Он основан на операторном усреднении возмущения, переходе на алгебру симметрий и когерентном преобразовании от исходного представления этой алгебры к ее неприводимому представлению в пространстве функций над лагранжевым подмногообразием в симплектическом листе.

Особый интерес представляют решения уравнений типа (1), отвечающие границам спектральных кластеров вблизи собственных значений невозмущенного уравнения, где упомянутые лагранжевы подмногообразия почти схлопываются и интегральное представление решения над ними становится невозможным. Подход к построению асимптотики около границ кластеров с помощью "деформированных" когерентных состояний был намечен в [4], но его обоснование пока не осуществлено.

В данной работе на примере задачи (1) предложен метод построения асимптотических решений вблизи верхней и нижней границ спектральных кластеров с помощью нового интегрального представления. После применения [3,4] операторного усреднения и когерентного преобразования к задаче (1) на l -ом неприводимом представлении алгебры симметрий невозмущенного оператора мы приходим к задаче на собственные значения в пространстве \mathcal{P}_ℓ полиномов степени не выше $\ell \sim 1/\hbar$. Искомый полином удовлетворяет дифференциальному уравнению 2-ого порядка класса Фукса с 4-мя конечными особыми точками. Вначале изучается вспомогательная спектральная задача в классе голоморфных функций с равными нулю характеристическими показателями в конечных особых точках. Далее, асимптотика искомого полинома получается с помощью операции проектирования на подпространство \mathcal{P}_ℓ , обобщающей интегральное представление Дирака.

Изучена также задача вычисления средних значений дифференциальных операторов на решениях (1) вблизи границ спектральных кластеров. Оказалось, что асимптотика средних в члене порядка \hbar выглядит нетривиально.

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 09-01-00606) и Совета по грантам при Президенте РФ (проект НШ-3439.2010.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в дифракции коротких волн. Метод эталонных задач. М.: Наука, 1972.
- [2] Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.
- [3] Karasev M. V. Birkhoff resonances and quantum ray method. In: Proc. Intern. Seminar "Days of Diffraction - 2004 St. Petersburg, 2004, 114-126.
- [4] Карасев М. В., Новикова Е. М. Представление точных и квазиклассических собственных функций через когерентные состояния. Атом водорода в магнитном поле.// ТМФ. 1996. Т.108. No. 3. с.339–387.