АСИМПТОТИКА СПЕКТРА АТОМА ВОДОРОДА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ ВБЛИЗИ НИЖНИХ ГРАНИЦ СПЕКТРАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ

А.С. Мигаева, А.В. Перескоков
anastasiy_mi@mail.ru, pereskokov62@mail.ru

УДК 517.984, 517.958

Найдена асимптотика серии собственных значений и асимптотические собственные функции вблизи нижних границ резонансных спектральных кластеров, которые образуются около уровней энергии невозмущенного атома водорода.

Ключевые слова: спектральный кластер, квантовый метод усреднения, когерентное преобразование, ВКБ-приближение

Asymptotics of the spectrum of the hydrogen atom in electromagnetic field near the lower boundaries of spectral clusters

We obtain the asymptotics of the series of eigenvalues and the asymptotic eigenfunctions near the lower boundaries of the resonance spectral clusters formed near the energy levels of the unperturbed hydrogen atom.

Keywords: spectral cluster, quantum averaging method, coherent transformation, the WKB approximation

Рассмотрим задачу на собственные значения в пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$ для нерелятивистского гамильтониана атома водорода в однородном электромагнитном поле

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_0 + \varepsilon \mathbb{M}_3 + \varepsilon E_1 x_1 + \varepsilon^2 \mathbb{W}, \tag{1}$$

где

$$\mathbb{H}_0 = -\Delta - |x|^{-1}, \qquad \mathbb{M}_3 = ix_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - ix_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad \mathbb{W} = (x_1^2 + x_2^2)/4.$$

Здесь через $x = (x_1, x_2, x_3)$ обозначены декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$, Δ — оператор Лапласа, магнитное поле направлено вдоль оси x_3, а электрическое поле вдоль оси x_1 , $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Предположим, что напряженность электрического поля имеет вид $E_1 = \hbar e_1$, где $\hbar > 0$ - малый параметр, а число $e_1 > 0$ — любое. Кроме того, пусть параметры ε и $\hbar$ удовлетворяют условию $\varepsilon^{1/7} \ll \hbar$ и выполнено равенство $\hbar = 1/n$, где $n \in \mathbb{N}$.

Задача об атоме водорода в электромагнитном поле представляет большой физический и математический интерес. Особенностью данной задачи является наличие в гамильтониане одновременно и электрического, и магнитного полей, которые ортогональны друг другу. Это приводит к образованию около собственных значений невозмущенного атома водорода резонансных спектральных кластеров [1].

Мигаева Анастасия Сергеевна, студент, Национальный исследовательский университет "МЭИ" (Москва, Россия); Anastasia Migaeva (National Research University"MPEI", Moscow, Russia)

Перескоков Александр Вадимович, д.ф.-м.н., профессор, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Национальный исследовательский университет "МЭИ" (Москва, Россия); Alexander Pereskokov (National Research University «Higher School of Economics», National Research University"MPEI", Moscow, Russia)

Особый интерес представляют состояния системы (1), отвечающие границам спектральных кластеров. В работе [2] на примере задачи об атоме водорода в магнитном поле был предложен общий метод построения асимптотики спектра вблизи границ кластеров, основанный на новом интегральном представлении асимптотических собственных функций. В данной работе этот метод будет применен к гамильтониану (1). Для нахождения асимптотики будут использованы неприводимые представления алгебры Карасева – Новиковой с квадратичными коммутационными соотношениями [3].

Произведем перенормировку спектральной задачи, затем дважды применим квантовый метод усреднения и выполним когерентное преобразование [1]. В результате приходим к однопараметрическому семейству дифференциальных уравнений Гойна

$$\frac{\overline{z}(\overline{z}^2+r\overline{z}+1)}{|m|^2}\frac{d^2\Phi}{d\overline{z}^2}-\frac{1}{|m|}\Big[(2\sqrt{a}-1-\frac{3}{|m|})\overline{z}^2+\frac{3(1-27e_1^4)}{f}(\sqrt{a}-$$

$$-1-\frac{2}{|m|})\overline{z}-1-\frac{1}{|m|}\Big]\frac{d\Phi}{d\overline{z}}+\Big[(\sqrt{a}-\frac{1}{|m|})(\sqrt{a}-1-\frac{1}{|m|})\overline{z}-$$

$$-\frac{1}{2f}(3(\sqrt{a}-1)(1+\frac{1}{|m|})-\frac{1}{|m|^2})+\frac{e_1^2}{f}(6-a+\frac{1}{|m|^2})+$$

$$+\frac{9e_1^4}{2f}(4a+9\sqrt{a}+3+\frac{9}{|m|}(\sqrt{a}-1)+\frac{5}{|m|^2})+\frac{n^4\xi}{4|m|^2}\Big]\Phi=0. \qquad (2)$$

Здесь числа

$$f=1+9{e_1}^2,\quad r=2-f+2/f,\quad a=n^2|m|^{-2},\quad m\in\mathbb{Z},\quad 5^{-1/2}n<|m|<n.$$

Уравнение (2) содержит параметр e_1, рост которого отвечает увеличению напряженности электрического поля, а также число ξ, которое определяет поправку к спектру. Собственными числами уравнения Гойна назовем такие значения параметра ξ, при которых это уравнение имеет полиномиальные решения в пространстве $\mathcal{P}[m,n]$ многочленов степени не выше $n-|m|-1$.

Далее для уравнения Гойна строится асимптотическое решение многоточечной спектральной задачи в классе антиголоморфных функций с равными нулю характеристическими показателями в конечных особых точках и показателем $n-|m|-1$ в точке $\overline{z}=\infty$. Асимптотика искомого многочлена получается в результате проектирования асимптотического решения многоточечной спектральной задачи на пространство $\mathcal{P}[m,n]$.

Асимптотика решений уравнений Гойна (2) находится с помощью комплексного метода ВКБ и метода согласования асимптотических разложений. При изменении параметра e_1 возникают различные случаи расположения особых точек и точек поворота на комплексной плоскости. Этим случаям отвечает различная глобальная структура линий Стокса.

Основным результатом данной работы является доказательство существования вблизи нижних границ спектральных кластеров серии собственных значений оператора (1) со следующей асимптотикой

$$\mathcal{E}_k=-\frac{1}{4n^2}+\varepsilon m\sqrt{9e_1^2+1}+\frac{\varepsilon^2n^2[n^2(1-14e_1^2-153e_1^4)+m^2(1+30e_1^2+27e_1^4)]}{2(9e_1^2+1)}+$$

$$+\frac{\varepsilon^2 n^2(2k+1)}{\sqrt{9e_1^2+1}}\sqrt{n^2(-1+18e_1^2+81e_1^4)+m^2(5+18e_1^2-81e_1^4)}+$$
$$+O(\varepsilon^2 n^2)+O(\varepsilon^3 n^{10}), \qquad k=0,1,2,\dots. \tag{3}$$

Здесь $\varepsilon \to +0$, числа $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют условиям $1 \ll n \ll \varepsilon^{-1/7}$, $5^{-1/2}n < |m| < n$. Кроме того, параметр $e_1 > 0$, $e_1 \neq \sqrt{\sqrt{2}-1}/3$, $e_1 \neq \sqrt{\sqrt{6}+1}/3$.

Формула (3) описывает расщепление спектра (т.е. эффект Зеемана – Штарка) для атома водорода в ортогональных электрическом и магнитном полях. Отметим, что асимптотику (3), а также формулу для соответствующих асимптотических собственных функций получить стандартными методами, такими, как лучевой метод или теория комплексного ростка невозможно.

Литература

1. *Карасев М.В., Новикова Е.М.* Алгебра с полиномиальными коммутационными соотношениями для эффекта Зеемана–Штарка в атоме водорода // ТМФ, **142**:3 (2005), 530-555.

2. *Перескоков А.В.* Асимптотика спектра атома водорода в магнитном поле вблизи нижних границ спектральных кластеров // Тр. ММО, **73**:2 (2012), 277-325.

3 *Карасев М.В., Новикова Е.М.* Представление точных и квазиклассических собственных функций через когерентные состояния. Атом водорода в магнитном поле // ТМФ, **108**:3 (1996), 339-387.