ОБ АСИМПТОТИКЕ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ТИПА ХАРТРИ, СОДЕРЖАЩЕГО ФУНКЦИЮ МАКДОНАЛЬДА[1]

А.В. Перескоков (Москва, НИУ МЭИ, НИУ ВШЭ)
pereskokov62@mail.ru

Рассмотрим задачу на собственные значения для нелинейного оператора типа Хартри в $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$\left(\mathbf{H} + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} K_0(\varkappa|q - q'|) \mid \psi(q') \mid^2 dq'\right)\psi = \lambda\psi, \quad \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1. \quad (1)$$

Здесь

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2}\Big) + \frac{q_1^2 + q_2^2}{2}$$

[1] Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № FSWF-2023-0012)

обозначает двумерный осциллятор, $K_0(x)$ — функция Макдональда, $\varkappa > 0$ — параметр, $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Задача (1) относится к классу резонансных: обе частоты двумерного осциллятора $\mathbf{H}$ равны единице.

Хорошо известно, что при $\varepsilon = 0$ собственные значения $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ задачи (1) имеют вид $\lambda(0) = n + 1, \quad n = 0, 1, \ldots$. Рассмотрим случай, когда число n, задающее невозмущенное собственное значение, велико (для определенности будем считать, что λ имеет порядок ε^{-1}). Сформулируем основной результат.

Для каждого числа $k = 0, 1, 2, \ldots$ собственные значения задачи (1) при $n \to \infty$ задаются асимптотической формулой

$$\lambda_{n,k}(\varepsilon) = n + 1+$$

$$+\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}2(k!)^2}\left\{\frac{A_{2k}(\varkappa^2)}{\varkappa}\exp\left(\frac{\varkappa^2}{4}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{\varkappa}{2}\right) - \frac{2B_{2k-1}(\varkappa^2)}{\sqrt{\pi}}\right\} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{2}$$

где

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}dt$$

— интеграл вероятностей, $A_{2k}(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, и $B_{2k-1}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ — системы многочленов степени $2k$ и $2k-1$ соответственно, определяемые равенствами [1]

$$A_{2k}(x) =$$

$$= \exp\left(-\frac{x}{4}\right)\frac{\partial^{2k}}{\partial\omega^k\partial\eta^k}\left[\frac{1}{(1-\omega)(1-\eta)}\exp\left(\frac{x(1-\omega\eta)}{4(1-\omega)(1-\eta)}\right)\right]\Bigg|_{\omega=\eta=0},$$

$$B_{2k-1}(x) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}\frac{\partial^{2k}}{\partial\omega^k\partial\eta^k}\left[\frac{1}{(1-\omega)(1-\eta)}\exp\left(\frac{x(1-\omega\eta)}{4(1-\omega)(1-\eta)}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left\{\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{x}\sqrt{1-\omega\eta}}{2\sqrt{(1-\omega)(1-\eta)}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right\}\right]\Bigg|_{\omega=\eta=0},$$

$$B_{-1}(x) = 0.$$

В частности, при $k = 0, 1, 2$ формула (2) принимает вид

$$\lambda_{n,0}(\varepsilon) = n + 1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}2\varkappa}\exp\left(\frac{\varkappa^2}{4}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{\varkappa}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\lambda_{n,1}(\varepsilon) = n + 1 +$$
$$+ \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}\,32} \left\{ \frac{(\varkappa^2+4)^2}{\varkappa} \exp\left(\frac{\varkappa^2}{4}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\varkappa}{2}\right) - \frac{2(\varkappa^2+6)}{\sqrt{\pi}} \right\} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
$$\lambda_{n,2}(\varepsilon) = n + 1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}\,2048} \left\{ \frac{(\varkappa^4+16\varkappa^2+32)^2}{\varkappa} \exp\left(\frac{\varkappa^2}{4}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\varkappa}{2}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{2(\varkappa^6+30\varkappa^4+268\varkappa^2+648)}{\sqrt{\pi}} \right\} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Здесь $n \to \infty$.

Разложение (2) описывает спектр оператора типа Хартри вблизи верхних границ спектральных кластеров, которые образуются около собственных значений невозмущенного оператора **H**. Соответствующие асимптотические собственные функции локализованы вблизи окружности.

Литература

1. Pereskokov A.V. Asymptotics of the spectrum of a Hartree type operator with self-consistent potential including the Macdonald function / A.V. Pereskokov // J. Math. Sci. — 2024. — V. 279, № 4. — P. 508–524.